Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006
SUBIECTELE

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie A o matrice pătrată de ordin n, cu elemente numere complexe şi A^* matricea sa adjunctă. Demonstraţi că dacă există un număr natural $m \geq 1$ astfel încât $(A^*)^m = 0_n$, atunci $(A^*)^2 = 0_n$.

Subiectul 2. Vom spune că matricea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o *pseudo-inversă* a matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă $A = ABA$ şi $B = BAB$.

a) Demonstraţi că orice matrice pătrată are cel puţin o pseudo-inversă.

b) Pentru care matrice este pseudo-inversa unică?

Subiectul 3. Se dau în plan sistemele de puncte $A_1, A_2, \dots, A_n$ şi $B_1, B_2, \dots, B_n$, având centre de greutate diferite. Demonstraţi că există un punct P astfel încât

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n = PB_1 + PB_2 + \ldots + PB_n.$$

Subiectul 4. Se consideră o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, care are proprietatea: pentru orice $x > 0$, şirul $(f(nx))_{n \geq 0}$ este strict crescător.

a) Dacă funcţia este în plus continuă pe $[0, 1]$, rezultă că f este strict crescătoare?

b) Aceeaşi întrebare dacă funcţia este continuă pe $\mathbb{Q}_+$.

Timp de lucru: 3 ore
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.